Computergraphik
Kurze Wdhg. Mathematik

G. Zachmann

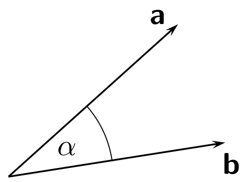
Clausthal University, Germany

zach@in.tu-clausthal.de

Vektoren

- Notation: Vektoren mit kleinen fetten Buchstaben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$



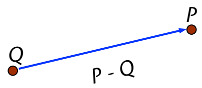
- Betrag: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = a$

- Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$$

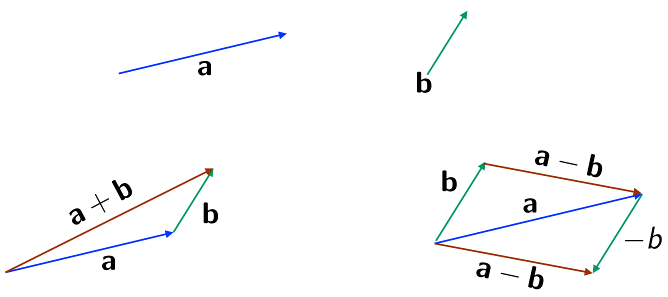
Unterschied zwischen Punkten und Vektoren

- Notation: Punkte mit normalen Großbuchstaben
- Achtung: Punkt ≠ Vektor !
- Unterschiede:
  - Punkt = Ort im Raum
  - Vektor = Richtung + Länge = Verschiebungsoperator
- Merkregeln:
  - Punkt + Vektor = Punkt
  - Vektor + Vektor = Vektor
  - Punkt - Punkt = Vektor (Notation: $\overline{QP}$)
  - Punkt + Punkt = undefiniert!
  - Korrespondenz mittels Ursprungspunkt O:



$$\mathbf{p} = P - O \qquad P = O + \mathbf{p}$$

- Geometrische Interpretation der Vektor-Addition und -Subtraktion:



Addition Subtraktion

Terminologie

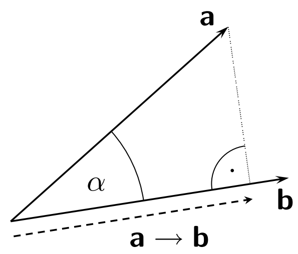
- Orthogonal = senkrecht zueinander
- Drei Vektoren sind koplanar ⇔
  es gibt eine Ebene die alle drei Vektoren enthält

- Persönliche Konvention auf den Folien: Begriffe, die neu definiert werden, werden mit grüner Schrift geschrieben

Senkrechte Projektion

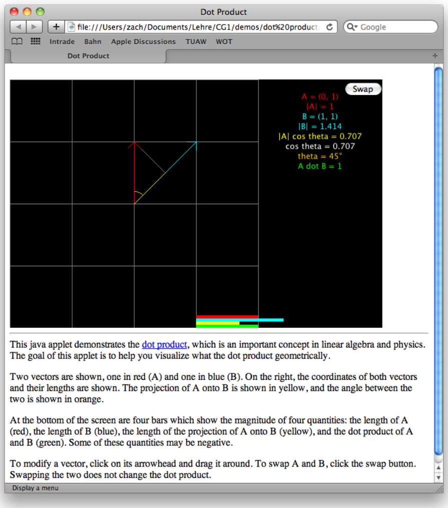
- Senkrechte Projektion:

$$|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot \cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$



- Mit anderen Worten: das Skalarprodukt lässt sich als senkrechte Projektion auf einen Einheitsvektor interpretieren;
  d.h., falls $|\mathbf{b}| = 1$
  dann ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}|$

Demo zum Skalarprodukt (dot product)



http://www.falstad.com/dotproduct/

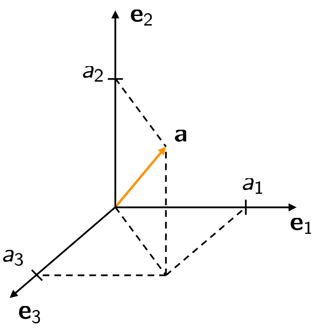
Darstellung eines Vektors bzgl. beliebiger Basis

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 =: a_1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 =: a_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 =: a_3$$



$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Identitäten für das Skalarprodukt

- Schwarz-Ungleichung:

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

- Dreiecksungleichung:

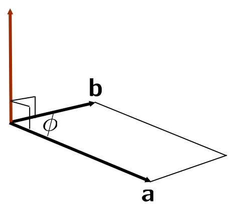
$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

Das Kreuzprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

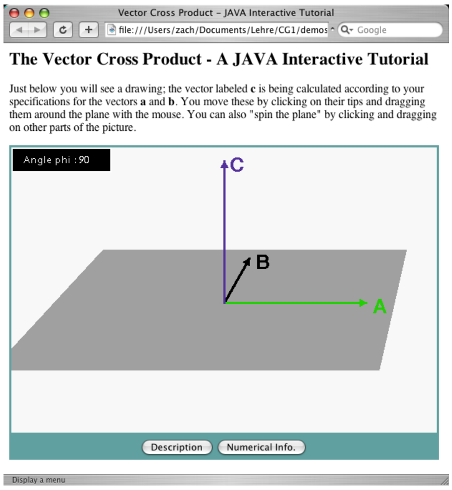
- Ergebnis ist ein Vektor, der senkrecht auf beiden Vektoren steht
- Länge des Vektors = Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$



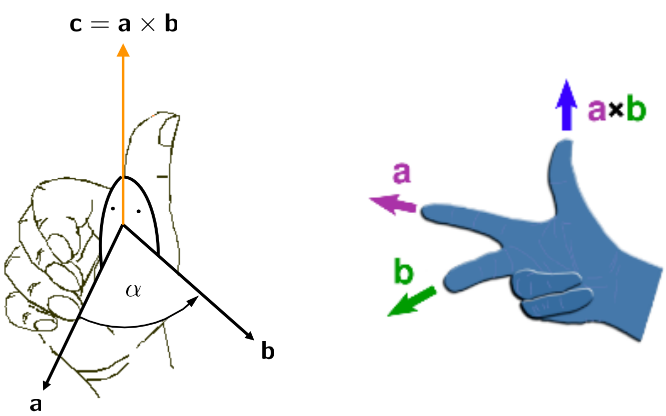
- Nützlich zur Erstellung von Koordinatensystemen (dazu später)

Demo



http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html

- Eselsbrücke: Rechte-Hand-Regeln



- Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = +\mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = +\mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = +\mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \qquad \text{(antikommutativ, schiefsymmetrisch)}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \qquad \text{(distributiv)}$$

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

- Das Kreuzprodukt lässt sich auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben
  - Definiere dazu die zum Vektor **a** duale (schiefsymmetrische) Matrix $\mathbf{a}^{\times}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\times} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Es gilt **nicht** die Assoziativität!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

- Es gilt die Jacobi-Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

- Es gilt **nicht** das Auslöschungsgesetz!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \not\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

- Zusammenhang zwischen den Beträgen von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

- Die Darstellung mit schiefsymmetrischer Matrix hat viele Vorteile, u.a.:
  - $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

    aber

    $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot (\mathbf{b}^{\times} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{b}^{\times}) \cdot \mathbf{c}$
  - $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

    aber

    $\mathbf{a}^{\times}(\mathbf{b}^{\times}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}^{\times}\mathbf{b}^{\times})\mathbf{c}$
  - Fazit: bei der Schreibweise mit schief-symmetrischer Matrix $\mathbf{a}^{\times}$ gilt die Assoziativität!

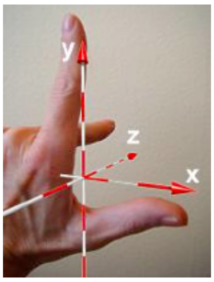
Das Tripel-Kreuzprodukt

- Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt:

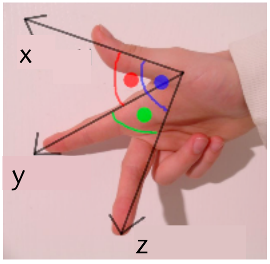
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

- Heißt auch *"triple product expansion", "triple cross product identity"* oder Graßmann-Identität oder Graßmannscher Entwicklungssatz
  - Eselsbrücke: "ABC = BAC- CAB" ("erst backen, dann kappen")
  - Oder: alle zyklischen Permutationen von A,B,C

3D-Koordinatensysteme



left handed system
(Linkssystem)



right handed system
(Rechtssystem)

Achtung: wir verwenden *immer* das rechtshändige Koordinatensystem! (es sei denn, es steht etwas anderes da)